

# Calcolo della MUF con metodo trigonometrico.

IW3HYG Andrea Borghi 2022

## Prefazione

Lo studio della propagazione ionosferica iniziata negli anni '30 non dava spiegazioni di come avvenisse il fenomeno. Dopo la seconda guerra mondiale si riprese lo studio per cercare di capire come avvenisse il processo di riflessione delle onde radio. Dopo grandi sforzi di fisici si arrivò a comprendere che dipendeva dalla quantità di energia proveniente dallo spazio, ed in particolar modo dalla nostra stella, sotto forma di onde ionizzanti come raggi UV, raggi X e raggi gamma. Questi colpendo lo strato alto della nostra atmosfera, composta di gas rarefatti, strappano gli elettroni agli atomi creando sia ioni positivi che elettroni liberi. Questi ultimi sono coloro che permettono la riflessione delle onde radio provenienti dalla superficie terrestre in quanto, avendo una piccolissima massa, sono facilmente coinvolti nel loro movimento dai campi elettromagnetici che li investono. Non mi dilungherò molto su questo argomento, esistono numerosi testi che spiegano dettagliatamente il processo, a noi interessa in modo sintetico sapere che ogni strato della ionosfera ha un numero abbastanza caratteristico di elettroni liberi. Lo strato F2 è quello che ha normalmente la più alta concentrazione di cariche negative e queste riescono a mantenersi sufficientemente anche durante la notte a causa della difficoltà che hanno nel ricombinarsi con i loro atomi essendo molto rarefatti. Il numero di elettroni liberi viene indicato con la lettera N e per lo strato F2 ha un valore intorno al  $10^{12} e/m^3$ . Lo strato ionosferico è caratterizzato dalla così detta frequenza di plasma o critica che corrisponde alla massima frequenza che può riflettere indietro se viene colpito verticalmente da un'onda elettromagnetica, quello che normalmente si fa con le ionosonde per ricavarne dati sul suo stato di ionizzazione. L'equazione utilizzata a questo scopo è:

$$F_c = 9 \cdot \sqrt{N}$$

Al di sotto di questa frequenza critica, che normalmente ha un valore attorno agli 8Mhz, lo strato della ionosfera riflette in modo incondizionato, qualunque sia l'angolo di incidenza dell'onda che lo investe. A frequenze superiori di  $F_c$  le cose cambiano, lo strato riflette solo se l'angolo di incidenza è sufficientemente inclinato come avviene per la luce che colpisce una lastra di vetro. Quindi per ogni angolo possibile di incidenza esiste una massima frequenza che potremmo usare per sfruttare il fenomeno della riflessione (MUF). Come per l'ottica questa equazione è:

$$MUF = \frac{F_c}{\sin(\alpha)}$$

Dove  $\alpha$  è per l'appunto l'angolo di incidenza come vedremo più avanti. I testi di Nerio Neri danno una buona spiegazione del fenomeno ed in internet esiste molta documentazione approfondita.

# Calcolo della MUF con metodi tradizionali

Strumento fondamentale per il calcolo è lo ionogramma che ci permette di ottenere il valore di foF2 che corrisponde alla frequenza di plasma o più conosciuta come Fc o frequenza critica dello strato.

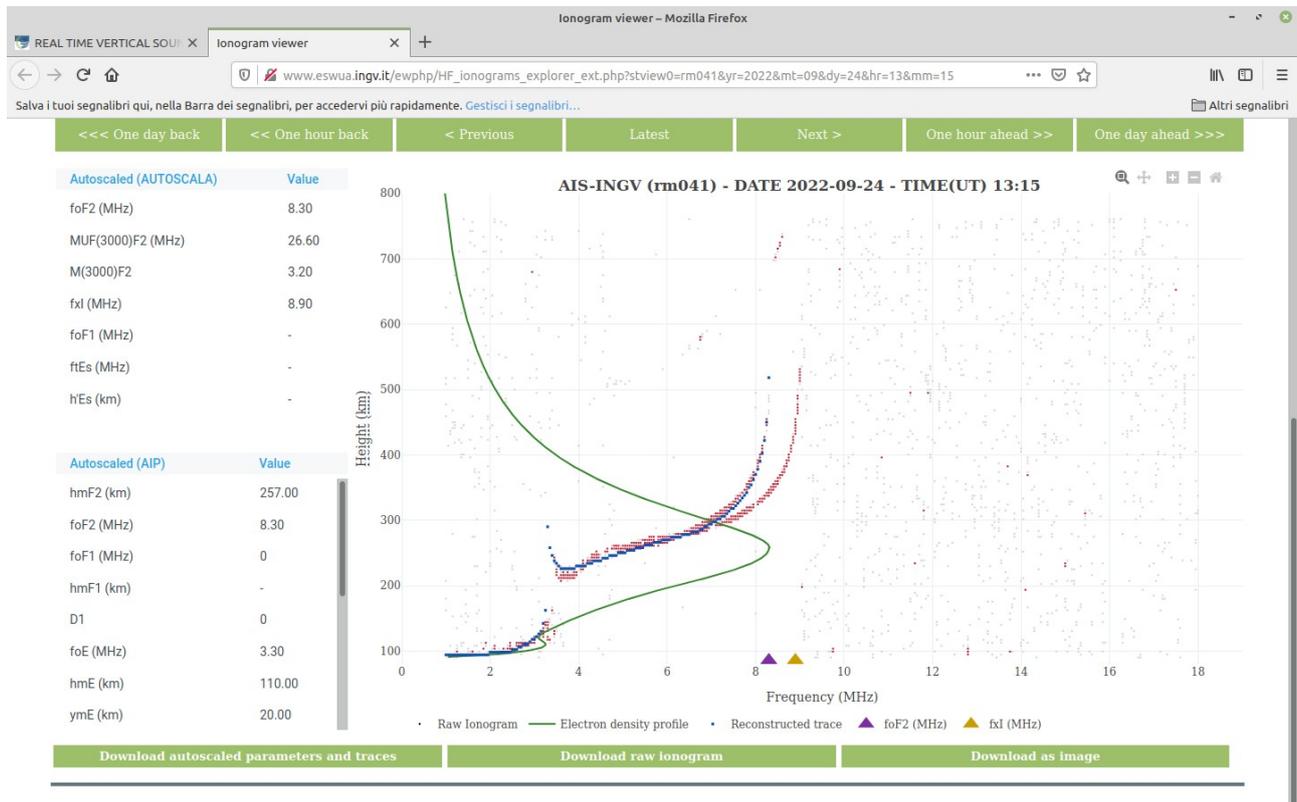


Immagine 1: Ionogramma eSWua

Questo ionogramma è visualizzabile nel sito dell'INGV eSWua <http://www.eswua.ingv.it/>. Ci fornisce un'infinità di informazioni sulla ionosfera e viene aggiornato ogni 15 minuti quindi realmente in tempo reale. Nella parte sinistra in alto possiamo leggere il valore di foF2 = Fc = 8.3MHz che prenderemo per ora come riferimento. Le tracce rosse rappresentano le reali riflessioni rilevate dalla ionosonda, mentre quelle di colore blu sono le tracce ricostruite dal software di analisi. Infine la traccia verde rappresenta il profilo della densità di elettroni liberi riferito all'altezza. Iniziamo con la verifica dell'equazione più conosciuta dai radioamatori e riportata nella maggior parte dei siti internet dedicati.

$$MUF = Fc \cdot 3,6$$

Molto semplice ma praticamente inutilizzabile. Si riferisce al minimo angolo di incidenza di un fronte d'onda elettromagnetica sullo strato F2 che, a causa della curvatura della superficie terrestre, non può essere minore di 16°. Infatti questa equazione è ricavata con il seguente procedimento:

$$MUF = \frac{Fc}{\sin(\alpha)} = \frac{Fc}{\sin(16^\circ)} = \frac{Fc}{0,276} = Fc \cdot \frac{1}{0,276} = Fc \cdot 3,627 \rightarrow MUF = Fc \cdot 3,6$$

Purtroppo è molto difficile raggiungere i 16° di incidenza ed in ogni caso questo valore di MUF al massimo si riferisce ad una frequenza utilizzabile per una massima distanza di salto per riflessione (HOP) di molto superiore ai classici 3000Km di riferimento.

$$MUF = F_c \cdot 3,6 = 8,3 \cdot 3,6 = 29,88 \text{ MHz}$$

Dallo ionogramma avevamo visto una MUF(3000) di 26.6MHz quindi possiamo tranquillamente scartare questo metodo.

Altro metodo per il calcolo analitico utilizza l'equazione che è riportata su tutti i testi che affrontano in modo approfondito l'argomento:

$$MUF = F_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}$$

Dove D è la distanza tra le due antenne trasmittente e ricevente e h è l'altezza dello strato riflettente (F2 nel nostro caso). Purtroppo questa equazione è ricavata molto semplicemente considerando la terra piatta ed ignorando la curvatura della sua superficie.

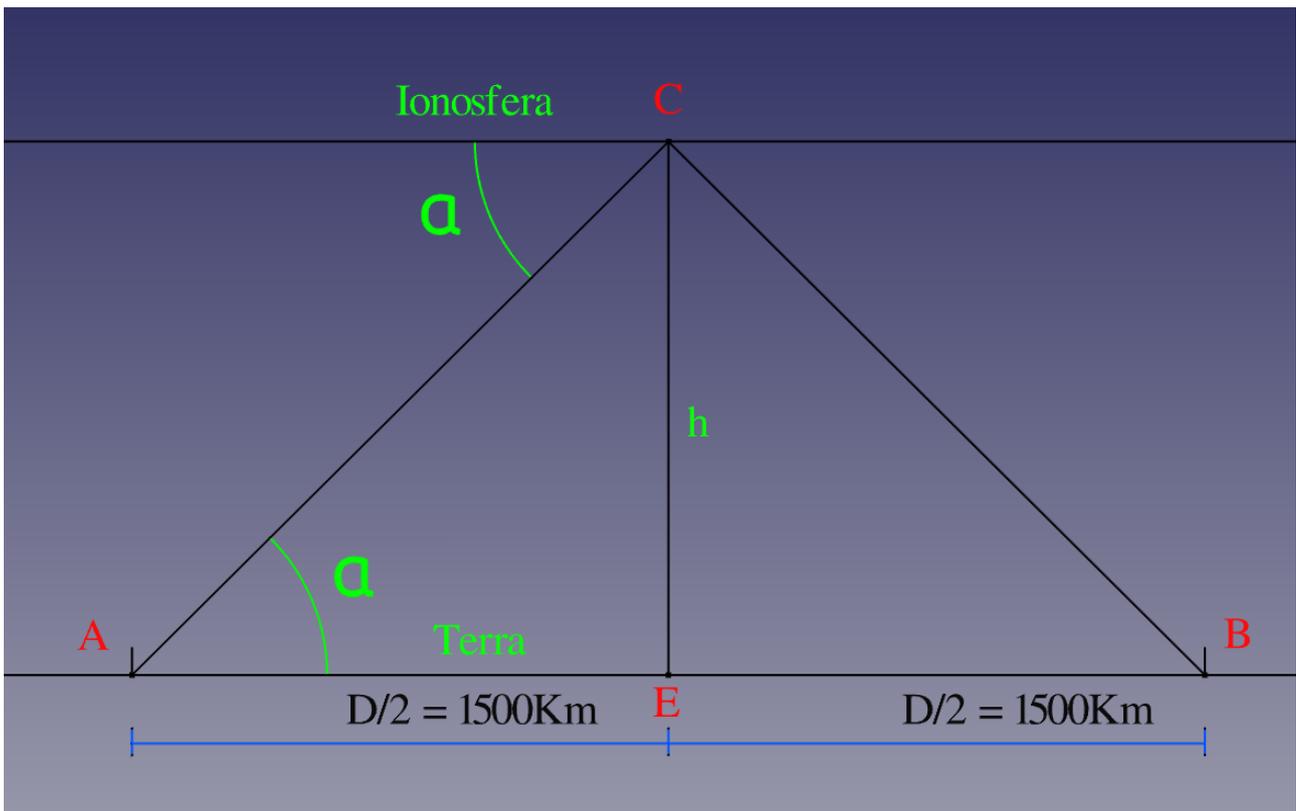


Immagine 2: Costruzione geometrica utilizzata per il calcolo della MUF(3000)

Ne comporta che l'angolo di incidenza sullo strato ionizzato e l'elevazione del lobo di irradiazione dell'antenna trasmittente corrispondano in quanto "alterni interni" questo ci porterà a errori di valutazione come vedremo più avanti. L'equazione è ricavata secondo il seguente procedimento.

L'angolo  $\alpha$  :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{CE}{AE}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{h}{D/2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{D}\right)$$

sostituiamo nell'equazione della MUF:

$$MUF = \frac{F_c}{\sin(\alpha)} = \frac{F_c}{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{2h}{D}\right)\right)} = F_c \cdot \operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2h}{D}\right)\right)$$

dato che la cosecante di un arcotangente è semplificabile in:

$$\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}x\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

ne risulta:

$$MUF = F_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}$$

Proviamo ad utilizzarla con i valori ricavati dallo ionogramma. Come prima cosa dobbiamo ricavare l'altezza dello strato F2.

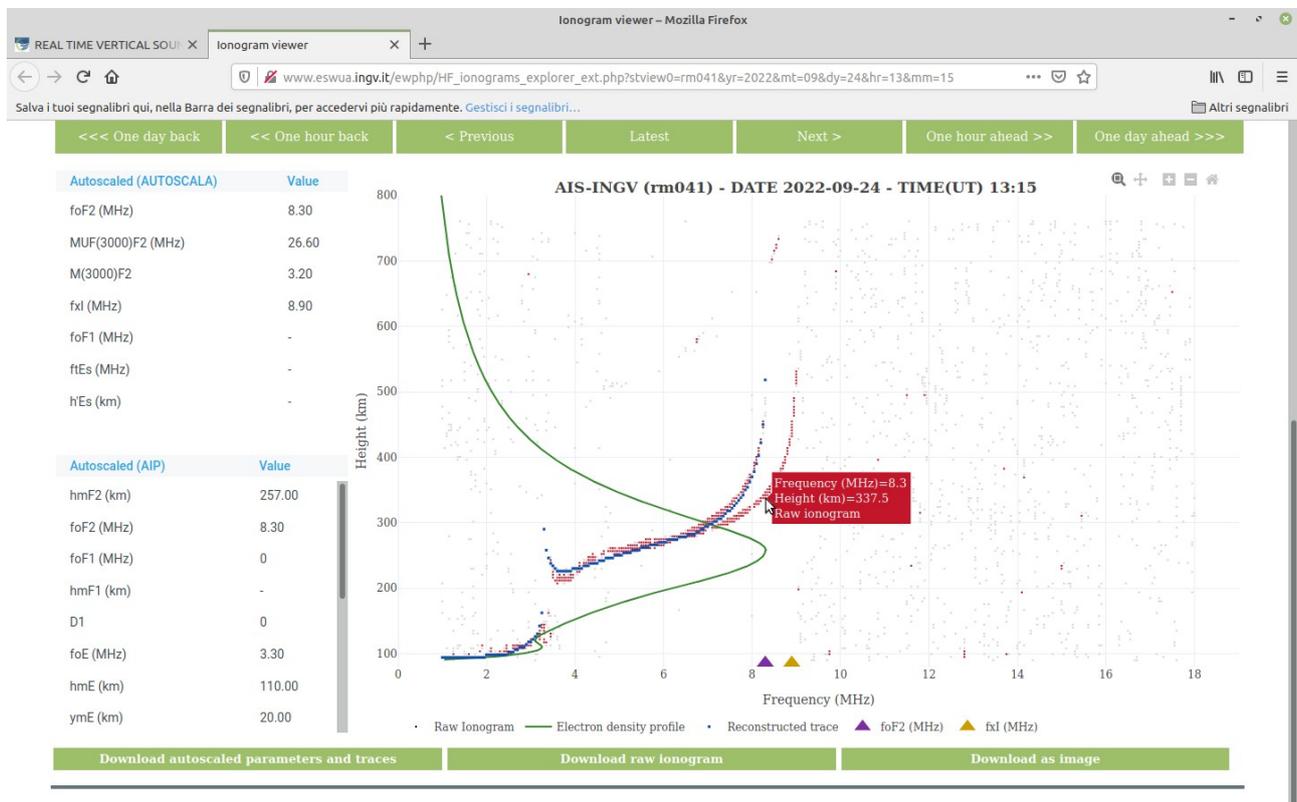


Immagine 3: Ionogramma con dettaglio dell'altezza (Si considera il tracciato rosso RAW)

Risulta che a 8,3MHz lo strato riflettente si trova a 337,5Km di altezza, quindi

$$MUF = F_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2} = 8,3 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3000}{2 \cdot 337,5}\right)^2} = 37,81 \text{ MHz}$$

A quanto pare c'è qualcosa che non va, siamo ben lontani dai 26,6MHz ricavati dal sito eSWua. Controlliamo il valore dell'angolo  $\alpha$  :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot 337,5}{3000}\right) = 12,68^\circ$$

Avevamo detto che a causa della curvatura della superficie terrestre l'angolo di incidenza non può essere inferiore ai 16°, ecco l'errore che si commette considerando la terra piatta per semplificare il calcolo. Esistono diverse procedure per compensare questo risultato ottenendo valori più vicini alla realtà. Di seguito riporto uno di questi metodi di compensazione che è stato sviluppato dai ricercatori che lavorano presso la ionosonda dell'Avana. La documentazione è scaricabile al seguente URL:

[https://www.researchgate.net/publication/253954181\\_Implementing\\_an\\_analytical\\_formula\\_for\\_calculating\\_M3000F2\\_in\\_the\\_ionosonde\\_operated\\_in\\_Havana](https://www.researchgate.net/publication/253954181_Implementing_an_analytical_formula_for_calculating_M3000F2_in_the_ionosonde_operated_in_Havana)

Nel documento, l'equazione analitica già vista, viene modificata aggiungendo una costante di compensazione k come si può vedere qui di seguito

$$MUF = k \cdot F_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}$$

dove k si ricava da una tabella inclusa nel documento che riporto qui sotto:

Rango de altura	Ecuación de k
200 y 250	$k = 0.00129 h + 0.34346$
250 y 300	$k = 0.001 h + 0.41578$
300 y 350	$k = 8.1702 \cdot 10^{-4} h + 0.47072$
350 y 400	$k = 7.3852 \cdot 10^{-4} h + 0.49819$
400 y 500	$k = 5.7052 \cdot 10^{-4} h + 0.56539$
500 y 600	$k = 4.0685 \cdot 10^{-4} h + 0.64723$
600 y 700	$k = 3.901 \cdot 10^{-4} h + 0.65728$
700 y 800	$k = 2.9652 \cdot 10^{-4} h + 0.72278$

Tabella 1: Tabella di compensazione

Nel nostro caso, con un'altezza dello strato F2 di 337,5Km k sarà :

$$k = (8,1702 \cdot 10^{-4} \cdot h) + 0,47072 = (8,1702 \cdot 10^{-4} \cdot 337,5) + 0,47072 = 0,746464$$

Sostituendo k nell'equazione :

$$MUF = k \cdot F_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2} = 0,746464 \cdot 8,3 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3000}{2 \cdot 337,5}\right)^2} = 28,22 \text{ MHz}$$

Come valore ci siamo avvicinati a quello di eSWua, la differenza è di 1,6MHz. Molto probabilmente eSWua utilizza un metodo di compensazione più raffinato.

## Metodo trigonometrico senza compensazione

Quello che segue è un metodo che ho realizzato per cercare di ottenere il valore più preciso possibile della MUF senza dover ricorrere a tabelle e coefficienti di compensazione. Il sistema di calcolo è complesso nell'insieme ma molto semplice nei passaggi e alla fine se interessa solo la MUF(3000) il tutto si riduce ad un'equazione abbastanza semplice da computare.

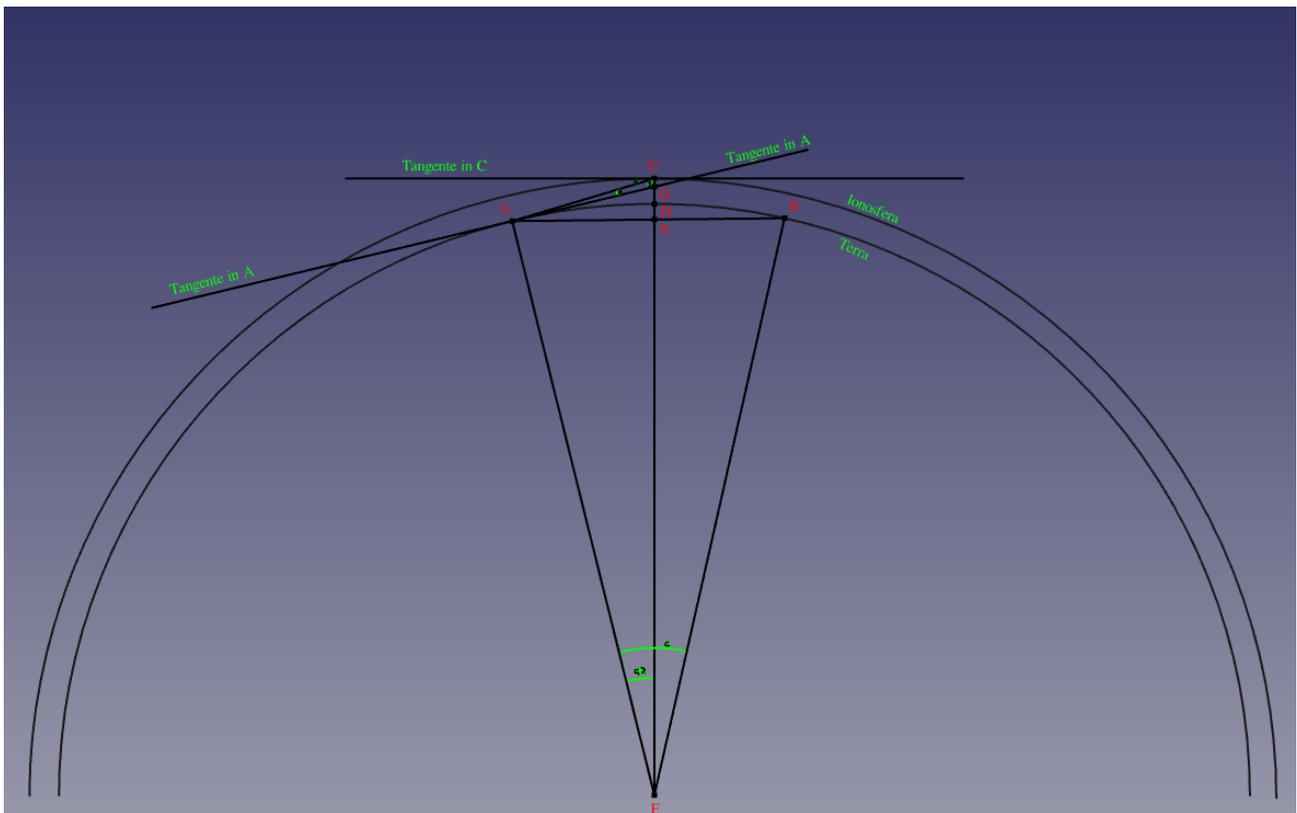


Immagine 4: Costruzione geometrica per il calcolo della MUF(3000) con la terra reale

Questa è la costruzione geometrica a cui ho dovuto ricorrere per arrivare alla soluzione del problema. L'antenna trasmittente si trova nel punto **A** sulla superficie della terra, si riflette nel punto **C** nello strato riflettente della ionosfera per raggiungere l'antenna ricevente nel punto **B** ad una distanza  $D$  dal punto **A**. Imponendo  $D = 3000\text{Km}$  che sarà la lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo  $\alpha$  al centro della terra ricaviamo:

$$\alpha = \frac{D \cdot 180}{\pi \cdot r}$$

dove  $r$  è il raggio medio della terra che è uguale a 6372,797 Km.

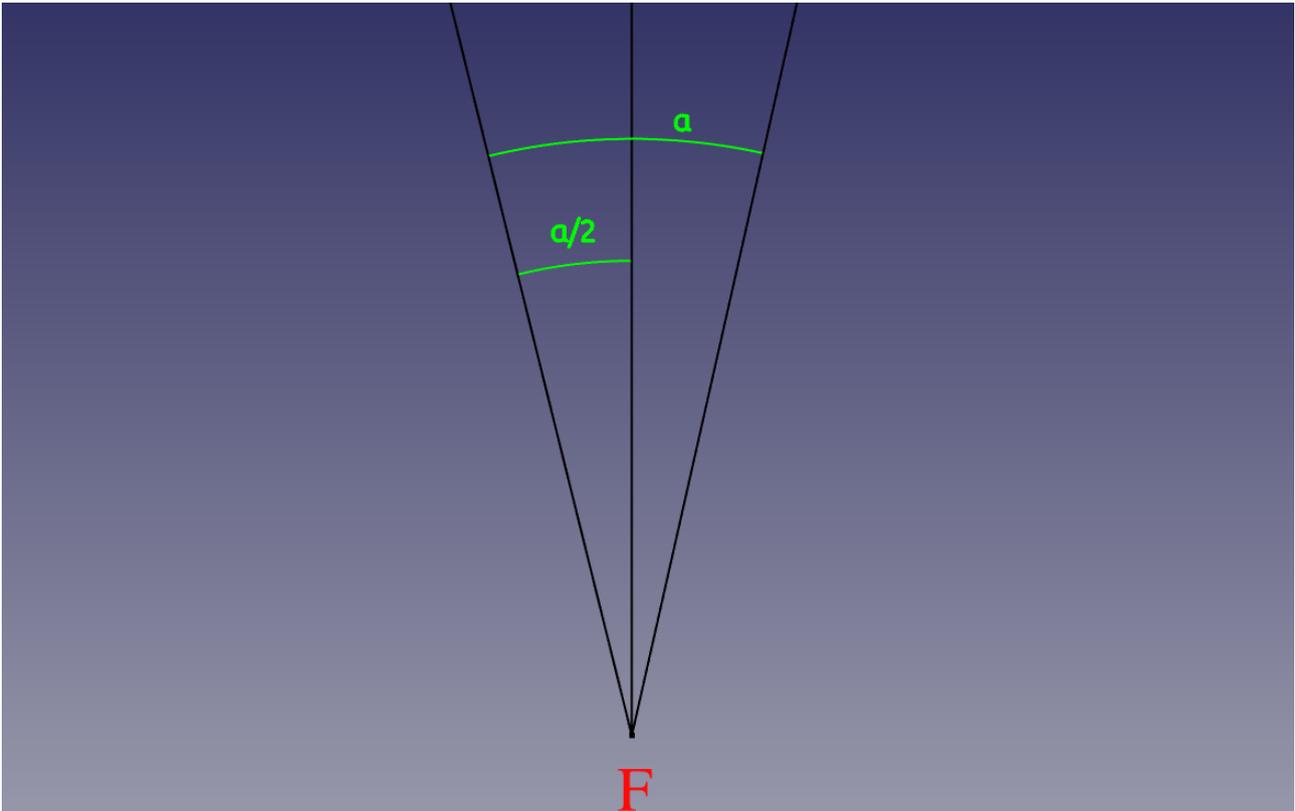


Immagine 5: Dettaglio dell'angolo al centro della terra che sottende la distanza tra TX e RX

Quindi:

(1)

$$\alpha = \frac{D \cdot 180}{\pi \cdot r} = \frac{3000 \cdot 180}{\pi \cdot 6372,797} = 26,97^\circ$$

Nel metodo di calcolo viene presa in considerazione solo metà di questo angolo come vedremo in seguito:

(2)

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{26,97}{2} = 13,486^\circ$$

Ora prendiamo in considerazione il triangolo **AEF** che presenta un angolo di  $90^\circ$  in **E** e l'ipotenusa corrisponde con il raggio della terra. Ne ricavo in due passaggi i due cateti **AE** e **FE**:

(3)

$$\overline{AE} = r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6372,797 \cdot \sin(13,486) = 1486,2 \text{ Km}$$



Conoscendo l'ipotenusa ricaviamo l'angolo  $\beta$

**(8)**

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1486,2}{1572,3}\right) = 70,949^\circ$$

Considerando che il segmento **CE** nel punto **C** forma un angolo di  $90^\circ$  con la tangente allo strato riflettente della ionosfera nel punto **C** per differenza possiamo ricavare il nostro l'angolo di incidenza  $\Phi$  :

**(9)**

$$\Phi = 90 - \beta = 90 - 70,949 = 19,051^\circ$$

Possiamo ora calcolare il valore di MUF(3000)

**(10)**

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(\Phi)} = \frac{8,3}{\sin(19,051)} = 25,428 \text{ MHz}$$

e per completezza il fattore M(3000):

$$M(3000) = \frac{MUF(3000)}{F_c} = \frac{25,428}{8,3} = 3,064$$

Il valore di MUF ricavato è 1,172Mhz più basso di quello fornito da eSWua, abbiamo ottenuto quindi un'ottima precisione senza fattori di correzione e tabelle. Ora il calcolo procede per ricavare l'angolo di elevazione del lobo di irradiazione dell'antenna trasmittente necessario per colpire lo strato F2 con maggior intensità possibile. Passiamo quindi al triangolo **AFG** che ha un lato costituito dalla tangente alla superficie terrestre nel punto **A** dove abbiamo un angolo di  $90^\circ$ . Ne ricaviamo la lunghezza del cateto **AG** che ci verrà utile nel passaggio successivo:

**(11)**

$$\overline{AG} = r \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6372,797 \cdot \tan(13,486) = 1528,3 \text{ Km}$$

Tramite Pitagora ricaviamo l'ipotenusa **FG**

**(12)**

$$\overline{FG} = \sqrt{r^2 + \overline{AG}^2} = \sqrt{6372,797^2 + 1528,3^2} = 6553,5 \text{ Km}$$

Passiamo al triangolo **ACG** che è un triangolo irregolare. Per differenza calcoliamo il lato **CG**:

**(13)**

$$\overline{CG} = r + \overline{DC} - \overline{FG} = 6372,797 + 337,5 - 6553,5 = 156,8 \text{ Km}$$

Giunti a questo punto applicando il teorema dei seni di Eulero possiamo finalmente ricavare il valore dell'angolo Theta:

**(14)**

$$\Theta = \sin^{-1}\left(\frac{\overline{CG} \cdot \sin(\beta)}{\overline{AG}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{156,8 \cdot \sin(70,949)}{1528,3}\right) = 5,56^\circ$$

Si nota chiaramente che l'angolo di elevazione del lobo di irradiazione non ha nulla a che vedere con l'angolo di incidenza dell'onda sulla ionosfera. Con soli 5,56°, praticamente trasmettendo quasi radenti al suolo, raggiungiamo lo strato F2 con circa 19° di inclinazione.

Questo procedimento può essere eseguito anche sullo strato E, naturalmente il valore di D o distanza di salto, deve essere impostata in modo adeguato nella **(1)**.

Di seguito riporto un programma MATLAB/OCTAVE per eseguire il calcolo agevolmente:

```
clear all;
```

```
r = 6372.797; %raggio della terra
```

```
D = 3000; %distanza tra i due punti in Km
```

```
printf("\r\n\r\n");
```

```
printf("***** Calcolo MUF(3000) *****\r\n");
```

```
printf("*****IW3HYG Andrea Borghi*****\r\n");
```

```
h = input("\r\nAltezza dello strato [Km] : ");
```

```
Fc = input("Valore della frequenza critica foF2 [MHz] : ");
```

```
alpha = (D*180)/(pi*r);          %1-angolo al centro della terra che sottiene l'arco D
```

```
alpha2 = alpha/2;              %2-a noi interessa la metà di questo angolo
```

```
AE = r*sind(alpha2);           %3-segmento perpendicolare che unisce la perpendicolare al punto E intermedio  
formando un angolo retto
```

```
FE = r*cosd(alpha2);          %4-segmento che unisce il centro della terra al punto E
```

```
DE = r-FE;                    %5-tratto che unisce il punto E alla crosta terrestre
```

```
CE = h+DE;                    %6-distanza del punto E dal punto in cui avviene la riflessione ionosferica
```

```
AC = sqrt(AE^2+CE^2);         %7-percorso che l'onda emessa percorre prima della riflessione
```

```
beta = asind(AE/AC);          %8-angolo tra la perpendicolare al punto di riflessione e il percorso dell'onda
```

```
phi = 90-beta;                %9-angolo di incidenza dell'onda sulla ionosfera
```

```
MUF3000 = Fc/sind(phi);       %10-MUF(3000)
```

```
M3000 = MUF3000 / Fc;        %per completezza...
```

```
AG = r*tand(alpha2);          %11-lunghezza del tratto della tangente in A fino al punto G
```

$FG = \sqrt{r^2 + AG^2}$ ;                    %12-distanza del punto G dal centro della terra (ipotenusa del triangolo AFG)  
 $CG = r + h - FG$ ;                    %13-distanza del punto di riflessione al punto G (triangolo ACG)  
 $\theta = \arcsin((CG * \sin(\beta)) / AG)$ ;   %14-angolo di irradiazione sopra l'orizzonte dell'antenna TX per percorrere 3000km

```

printf("\r\n\r\n");
printf("MUF(3000) : %.3f Mhz\r\n",MUF3000);
printf("M(3000) : %.3f \r\n",M3000);
printf("Angolo di incidenza sullo strato : %.2f°\r\n",phi);
printf("Angolo di elevazione del lobo di irradiazione : %.2f°\r\n",theta);

```

## Derivazione di un'equazione per la MUF(3000)

Se si lavora esclusivamente con lo strato F2 ed interessa solo il valore di MUF(3000), i triangoli **AEF** e **AEG** restano invariati, questo ci permette di semplificare il calcolo e di derivarne un'equazione molto più pratica della sequenza di calcoli appena vista. Per ottenere questo partiamo dall'equazione base della MUF che ora battezziamo MUF(3000):

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(\Phi)}$$

Sostituisco  $\Phi$  con la **(9)**:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(90 - \beta)}$$

Sostituisco  $\beta$  con la **(8)**:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(90 - \sin^{-1}(\frac{AE}{AC}))}$$

Essendo che AE è un segmento che non varia di lunghezza:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(90 - \sin^{-1}(\frac{1486,2}{AC}))}$$

Inserisco la **(7)** al posto di AC:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin(90 - \sin^{-1}(\frac{1486,2}{\sqrt{AE^2 + CE^2}}))}$$

Sostituisco nuovamente AE con il suo valore e CE con la **(6)**:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin\left(90 - \sin^{-1}\left(\frac{1486,2}{\sqrt{1486,2^2 + (CD + DE)^2}}\right)\right)}$$

Dato che il segmento CD corrisponde all'altezza dello strato ionosferico lo sostituisco con **h** e visto che DE è un segmento che non varia, lo sostituisco con il suo valore:

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\sin\left(90 - \sin^{-1}\left(\frac{1486,2}{\sqrt{1486,2^2 + (h + 175,2)^2}}\right)\right)}$$

Possiamo infine semplificare il denominatore sapendo che  $\sin(90-x) = \cos(x)$ :

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1486,2}{\sqrt{(1486,2)^2 + (h + 175,2)^2}}\right)\right)}$$

Quest'equazione ha la stessa precisione del complesso calcolo dimostrato.

È possibile comunque, introducendo una piccolissima imprecisione (all'incirca 140KHz), semplificare e rendere più mnemonica l'equazione come segue:

Essendo  $1486,2 \approx 473\pi$  e  $175,72 \approx 56\pi$

$$MUF(3000) = \frac{F_c}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{473\pi}{\sqrt{(473\pi)^2 + (h + 56\pi)^2}}\right)\right)}$$

Prendendo una forma anche sufficientemente elegante. Volendo si potrebbe continuare sostituendo il coseno di un arcocoseno con la sua funzione  $\sqrt{1-x^2}$  ma diventerebbe una complicazione piuttosto di una semplificazione.

## Conclusioni

A chi piace studiare ed approfondire gli argomenti, noterà che questa equazione, o metodo di calcolo, non è citato in nessun testo scolastico o specialistico del settore, semplicemente perché è stato da me realizzato dopo alcuni mesi di intenso studio. Lascio a voi di valutare la precisione del calcolo, sono sicuro che ne otterrete ottimi risultati. Personalmente la utilizzo in FT-8 per sapere costantemente su quale banda operare per avere i migliori risultati. Vi lascio augurandovi un buon lavoro e tanto divertimento in radio.



Andrea Borghi  
IW3HYG